نموذج مقترح للحوادث غير المتجانسة مع التطبيق على حـوادث الأخطـار النـووية

د . محمـد توفيـق البلقيـني
كلية الإدارة والاقتصاد / جامعة قطـر

نموذج مقترح للحوادث غير المتجانسة مع التطبيق على حـوادث الأخطـار النـووية

د . محمـد توفيـق البلقيـني
كلية الإدارة والاقتصاد / جامعة قطـر

١ - مقدمــة

إن الدراسات الحديثة والخاصة بالتنبؤ بعدد الحوادث أو عدد المطالبات التي يمكن أن تقـع في فروع التـأمين المختلفة والتي من شأنها التنبؤ بقيمة الخسائر المتوقعة وبالتالي تحديد السعر المناسب لكل نوع من أنواع التأمين تبين أن هناك إقبالاً متزايداً على استخدام الأساليب الكمية لإيجاد نماذج رياضية مناسبة لتوفيق تلك البيانات حتى يسهل عمل ذلك التنبؤ .

وهذا البحث سوف يقترح نموذج إحصائي مناسب لتوفيق تلك المطالبات توفيقاً دقيقاً - وهو نموذجاً عاماً بحيث يمكن تطبيقة على المطالبات أو الحوادث الخاصة بأي فرع من فروع التأمينات العامة وحيث أن هذه الحوادث تكون غير متجـانسة من عام لآخر فإنه يمكن القول بأن هذا النموذج يعتبر نموذجاً غير متجانس Heterogeneous Model .

وسوف يتناول هذا البحث بالدراسة والتحليل كيفية اشتقاق النموذج من بين النـماذج الإحصـائية - أيضاً سوف يتناول البحث خصائص هذا النموذج وكيفية تقدير معلماته ثم كيفية الحكم على كفاءة تلك المعلمات وأيضاً الحكم على كفاءة النموذج في توفيق البيانات الخاصة بالمطالبات . ثم تقدير معلمات النموذج باستخـدام البيانـات الـرقمية الخـاصة بعدد الحوادث النووية في الفترة ما بين ١٩٦٢ ، ١٩٨٥ ثم اختبـار هذه المعلمات واختبـار النمـوذج أيضاً باستخدام

البيانات العملية للحكم على صلاحيته .

وللتأكد من صلاحية النموذج للتطبيق على مطالبات أخرى غير حوادث الأخطار النووية سوف يطبق النموذج أيضاً على بيانات خاصة بالمطالبات لحوادث السيارات في دولة الكويت من عام ١٩٧٦ حتى عام ١٩٨٨ حيث أظهر صلاحية غير متوقعة وبالتالي يمكن تعميم تلك الصلاحية لمطالبات أي فرع من فروع التأمينات العامة .

٢ - النمـوذج المقــترح :

وحيث إن احتمال تحقيق هذه الأخطار عادة ما يكون نادر الحدوث ، فإن التوزيع البواسوني يعتبر التوزيع المتقطع المفضل لعدد الحوادث النووية ولكن أهم شرط لتطبيق هذا التوزيع هو أن يكون متوسط حدوث الحوادث ولنفرض أنه λ ثابت لجميع الحوادث في السنوات المختلفة وهذا مستحيل التحقيق . ومن هنا نستطيع القول بأن عدد الحوادث السنوية تخضع لتوزيع بواسون بمتوسط قدره λ_i حيث إننا نفترض أن هذا التوزيع ثابت لجميع الحوادث التي تحدث في عام واحد ، ولكن ذلك بشرط أن يكون المتوسط للعام i هو λ_i حيث $i = 1$ ، ٢ ، . . . . ، n مجرد دليل يدل على سنه وقوع الحدث أو الأحداث . (محمد البلقيني ، ١٩٩٠) .

وحيث إن هدفنا هو إيجاد نموذج رياضى تخضع له جميع الحوادث من عام لآخـر (Bhattacharya, et al, 1965) فإننا سوف ننظر إلى تلك الأحداث على أنها متغـير عشـوائي λ_i لأنها تختلف من عام لآخـر وسوف نفترض أن توزيع بواسون يمكن استخدامه بصفه شرطيه كنموذج صالح تخضع له عدد الحوادث من عام لآخـر ويمكن تعميم هذا النموذج حتى يصبح نموذج عام تخضع له الحوادث غير المتجانسة من عام لآخر ، فإذا افترضنا أن λ_i (أي معلمات توزيع بواسون) عبارة عن متغير عشوائي له توزيع آخر وليكن توزيع جاما بحيث أن

$$
g(\lambda) \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}} \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda/\beta}, & \lambda > 0, \alpha, \beta > 0 \\ 0 & \text{Elsewhere فيما عدا ذلك} \end{cases}
$$

وقد تم اختيار ذلك التوزيع من بين التوزيعات المتصلة الأخرى لأنه توجد به عدة مزايا أهمها :

١ - أن توزيع جاما له أشكال كثيرة ومتعددة تتوقف على قيمة معلماته β ، α . وبالتالي يعتبر توزيع مرن في تكوينه وبالتالي يمكن من خلاله اختيار المعلمات المناسبة التي تجعله أفضل التوزيعات لتوفيق البيانات .

٢ - سهوله حساب عزومه وتحديد خصائصه رياضياً (البلقيني ، ١٩٩٠) . حيث يكون متوسط هذا التوزيع هو $\mu = E(\lambda) = \alpha\beta$ ويكون تباينه هو $V(\lambda) = \sigma^2 = \alpha\beta^2$

ويمكن اعتبار توزيع بواسون الشرطي هو توزيع مناسب لعدد الحوادث في العـام (X) بشرط أن λ (المتـوسط لتوزيع بواسون) تتبع توزيع جاما ويكون لدينا :

$$
f(x_i = x / \lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!} & X = 0, \dots\dots\dots, n \\ 0 & \text{Elsewhere} \end{cases}
$$

ومما سبق فإن λ يفترض أنه متغير عشوائي يتبع توزيع جاما الذي له دالة كثافة الاحتمال $g(\lambda)$ ويتبع ذلك أن التوزيع الهامشي لعدد الحوادث (X) في الأعوام المختلفة يكون كالآتي :

$$\sigma^2 = Var(x) = \alpha(\alpha+1)\beta^2 + \alpha\beta - \alpha^2\beta^2$$

$$= \alpha\beta + \alpha\beta^2 = \mu + Q$$

تمت تجزئـه التبـاين هنـا إلى جزئين ويمثل الجزء الأول التباين الخاص بتوزيع بواسون ، بينما الجزء الثاني $var(\lambda)$ يمثل الزيادة في التباين عن التوزيع البواسوني نتيجة عدم التجانس بين الأحداث من عام لآخر .

٣ - تقديـر معلمـات النمـوذج :

لإيجاد طريقه لتقدير معلمات النموذج أي تقدير قيمة كل من α ، β تم اختيار طريقه الإمكان الأعظم حيث أنها تعتبر أفضل الطرق كفاءة في التقدير ، ولكن وجدنا إن هناك استحاله عمليه في إيجاد قيم التقديرات بصوره نهائية ، ومن هنا كان لابد أن نلجأ إلى طرق التحليل العددي لتقدير تلك المعلمات .

ونظريا وجد أن أكثر الطرق شيوعاً وكفاءة هي طريقة التقدير بدالة الإمكان الأعظم التي اقترحها وقدمها فيشر Fisher عام ١٩١٢ والتي تم تطويرها بواسطته وبواسطه كتاب آخرين فيما بعد .

ويمكن الحصول على التقدير باستخدام داله الإمكان الأعظم في الخطوات التالية (Hogg and Craig, 1978) .

١ - الحصول أولاً على دالة الإمكان الأعظم وتكون كما يلي :

$$L = \prod_{i=1}^{k}\left[\left\{\prod_{j=1}^{x_i}\left(\frac{\alpha+j-1}{j}\right)\right\}\frac{\beta^{x_i}}{(1+\beta)^{x_i+\alpha}}\right]$$

٢ - وحيث إن تعظيم أي دالة هو نفسه تعظيم لوغاريتم الدالة وبالتالي فإننا سوف نقوم بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لدالة الإمكان الأعظم لنحصل على ما يلي :

$$\log L = \sum_{i=1}^{k} \left\{ \sum_{j=1}^{x_i} \log(\alpha + j - 1) - \sum_{j=1}^{x_i} \log(j) + x_i \log(\beta) - x_i \log(1+\beta) - \alpha \log(1+\beta) \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{x_i} \log(\alpha+j-1) - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{x_i} \log(j) + \sum_{i=1}^{k} x_i \log(\beta) - \sum_{i=1}^{k} x_i \log(1+\beta) - n\,\alpha \log(1+\beta)$$

٣ - ولتعظيم أي دالـة لمتغيرات معينه فإننا نقوم بأخذ التفاضل لهذه الدالة بالنسبة لتلك المتغيرات ثم نساوي الناتج بالصفر وحيث إن لدينا معلمتين (β, α) فإننا سوف نفاضل لوغاريتم دالة الإمكان الأعظم بالنسبة للمتغيرات (β, α) ونساوي المعادلتين بالصفر ، ويتم حل المعادلتين للحصول على قيم β, α كالآتي :

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{x_i} \left(\frac{1}{(\alpha+j-1)}\right) - n \log(1+\beta) = 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta} = \frac{\Sigma x_i}{\beta} - \frac{\Sigma x!}{(1+\beta)} - \frac{n\,\alpha}{(1+\beta)} = 0$$

ويتضح من المعادلتين السابقتين إن هناك صعوبة في إيجاد قيم α , β بصورة نهائية رياضياً ، وبالتالي فلابد من حل هاتين المعادلتين رقمياً أي باستخدام طرق التحليل العددي (طريقة التوليد Iteration) .

وهنـاك عدد كبـير من الكتـاب اقترح إن نستخدم التقدير بطريقه العزوم للحصول على قيم أوليه نبدأ بها الحل حتى نحصل على الحل الأمثل فيما بعد بإستخدام الطرق الرقمية .

وحيث إن الخـطأ المعياري للتقـدير بطريقه الإمكان الأعظم ، هو الجذر التربيعي لعناصر القطر الرئيسي في مقلوب مصفوفة المعلومات Inverse of the Information Matrix . حيث أنـه يمكن الحصـول على عنـاصر تلك المصفـوفـه (مصفـوفه المعلومات) عن طريق أخذ القيمة المتوقعة للتفاضل الجزئي الثاني لدالة الإمكان الأعظم ثم تغيير إشارة هذه القيمة المتوقعة .

ولتكوين تلك المصفوفة لابد لنا أولاً من إيجاد التفاضل الجزئي الثاني بالنسبة للمعلمات α , β ثم نقوم بأخذ القيمة المتوقعة للتفاضل الجزئي الثاني ونغير إشارته لنحصل على عناصر مصفوفة المعلومات Information Matrix . ويكون التفاضل الجزئي الثاني كما يلي :

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \alpha^2} = -\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{x_i} \frac{1}{(\alpha+j-1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta^2} = -\frac{\Sigma x_i}{\beta^2} + \frac{\Sigma x_i}{(1+\beta)^2} + \frac{n\alpha}{(1+\beta)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \frac{n}{(1+\beta)} = \frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta\, \partial \alpha}$$

وتكون مصفوفة المعلومات Information Matrix كما يلي

$$I_{(\alpha,\beta)} = \begin{bmatrix} -E\left(\frac{\partial^2 \log L}{\partial \alpha^2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \log L}{\partial \alpha \partial \beta}\right) \\ -E\left(\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta \partial \alpha}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta^2}\right) \end{bmatrix}$$

وسوف نرمز لها بالمصفوفه التالية

$$I_{(\alpha,\beta)} = \begin{bmatrix} I_{\alpha\alpha} & I_{\alpha\beta} \\ I_{\beta\alpha} & I_{\beta\beta} \end{bmatrix}$$

وسوف يرمز للتقدير باستخدام دالة الإمكان الأعظم لكل من α ، β بالرموز $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$ على التوالي ، وبالتالي فإن مصفوفه التباين والتغاير للتقديرات α ، β تكون كالآتي :

$$I_{(\alpha,\beta)}^{-1} = \begin{bmatrix} \text{Vor}(\alpha) & \text{Cov}(\alpha,\beta) \\ \text{Cov}(\alpha,\beta) & \text{Vor}(\beta) \end{bmatrix}$$

وسوف نرمز لها بالرمز

$$I(\alpha, \beta)^{-1} = \begin{bmatrix} I^{\alpha\alpha} & I^{\alpha\beta} \\ I^{\beta\alpha} & I^{\beta\beta} \end{bmatrix}$$

وباستخدام بيانات عدد الحوادث النووية نجد أن الحصول على تقديرات α , β بطريقة رقمية يصبح أمر ميسور وكذلك يمكننا تكوين مصفوفه المعلومات التقديرية .

وبالتالي نستطيع الحصول على ما يلي :

$$I_{\alpha\alpha} = -E\left(\frac{\partial^2 \log L}{\partial \alpha^2}\right) = \sum_{x_i=0}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{k}\left\{\left(\sum_{j=1}^{x_i}\frac{1}{(\alpha+j-1)^2}\right)\right\}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{x_i}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{\alpha}\left(\prod_{j=1}^{x_i}\left(\frac{\alpha+j-1}{j}\right)\right)\right]$$

$$I_{\beta\beta} = -E\left(\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta^2}\right) = -\frac{n\alpha}{(1+\beta)^2} + \sum_{x_i=1}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{k} x_i\left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{(1+\beta)^2}\right)\right]$$

$$\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{x_i}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{\alpha}\prod_{j=1}^{x_i}\left(\frac{\alpha+j-1}{j}\right)$$

$$I_{\alpha\beta} = -E\left(\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta^2}\right. = \frac{-n}{(1+\beta)}$$

ويكون من السهل إيجاد مقلوب مصفوفه المعلومات كالآتي :

$$I(\alpha, \beta)^{-1} = \frac{1}{R}\begin{bmatrix} I_{\beta\beta} & -I_{\alpha\beta} \\ -I_{\alpha\beta} & I_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}$$

حيث أن

$$R = I_{\alpha\alpha}\, I_{\beta\beta} - (I_{\alpha\beta})^2$$

ويكـون الهـدف من إيجـاد مصفوفه المعلومات هو الحصول عن تقديرات التباينات للمعلمات α, β . فعلى سبيل المثال يلاحظ أن تباين المعلمة α هو

$$V(\alpha) = I^{\alpha\alpha} = \frac{I_{\beta\beta}}{R}$$

ويكون الخطأ المعياري للمعلمة α هو $S.E(\alpha) = (I^{\alpha\alpha})^{1/2}$

وبالمثل يكون تباين المعلمة β هو $Var(\beta) = I^{\beta\beta} = \frac{I_{\alpha\alpha}}{R}$

ويكون الخطأ المعياري للمعلمة β هو $S.E(\beta) = (I^{\beta\beta})^{1/2}$

وسوف نثبت إن تلك التباينات مفيدة للغاية عندما نستخدم البيانات الحقيقية .

وسوف نستخدم « طريقة دلتا » "Delta Method" (bishop, 1975) .

لإيجاد قيمة تباين μ , $Var(\mu)$ وكذلك تباين Q , $Var(Q)$ كالآتي :

حيث أن : $\mu = \alpha\beta \quad , \quad Q = \alpha\beta^2$

فإننا نستطيع إيجاد التباين لكل من μ , Q كالآتي :

$$Var(\mu) = H' \left[I_{(\alpha,\beta)}^{-1} \right] H$$

وكذلك

$$Var(Q) = G' \left[I_{(\alpha,\beta)}^{-1} \right] G$$

حيث أن :

$$H' = \left(\frac{\partial\mu}{\partial\alpha} \quad \frac{\partial\mu}{\partial\beta} \right) \quad , \quad G' = \left(\frac{\partial Q}{\partial\alpha} \quad \frac{\partial Q}{\partial\beta} \right)$$

وكذلك $I_{(\alpha,\beta)}^{-1}$ هي عبارة عن مقلوب مصفوفة المعلومات (أي أنها عبارة عن مصفوفه التباين والتغاير للمعلمات (α, β)) .

$$Var(\mu) = \beta^2\, Var(\alpha) + 2\,\alpha\beta\, Cov(\alpha,\beta) + \alpha^2\, Var(\beta)$$

$$Var(Q) = \beta^4\, Var(\alpha) + 4\,\alpha\beta^3\, Cov(\alpha,\beta) + 4\,\alpha^2\beta^2\, Var(\beta)$$

٤ - استخدام النموذج في التطبيق على بيانات الحوادث النووية :

وحتى نبـدأ التحليل الاحصـائي للبيانات علينا أن نلجأ إلى توزيع (جاما- بواسون)كنموذج مرشح للبيانات الخاصة بعدد الحوادث النووية الموضحة في جدول رقم (٢) المستخرج من جدول رقم (١) التالي :

جــدول رقــم (١)

عدد حوادث المسئولية النووية الشهرية في أمريكا خلال الفترة من ٦٢ - ٨٥

الشهر عدد الحوادث في سنة	يناير	فبراير	مارس	إبريل	مايو	يونيه	يوليو	اغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
١٩٦٢						٢						
٦٣	٢					١						١
٦٤					١		١					
٦٥	١					١						
٦٦		١			٢				١		١	١
٦٧								١				
٦٨					١						١	
٦٩	١								٢			
٧٠	١								١			
٧١	١								١		١	
٧٢					٣			١		١		١
٧٣			١		١			١				١
٧٤					١			١			١	
٧٥					٢				١	١		
٧٦	١	١		١	١	١		١	١	٢	١	١
٧٧			٢	١	١	٣		١		٢	١	١
٧٨	١	٢			١		١			٢	١	١
٧٩			٢	٣	٢	١	١		١		١	
٨٠	١	١			١					١		٢
٨١		١	٤	١	١				١			
٨٢	٢		١					١	١			
٨٣	١			١			١			١		
٨٤	١								١			
٨٥					١							

المصـدر : American Nuclear Insurers Reports, Re 3, March 1986 pp. 2–51 .

جـدول رقـم (٢)

عدد حوادث المسئولية النووية في أمريكا خلال الفترة من ١٩٦٢ - ١٩٨٥

السنة	عدد الحوادث
١٩٦٢	٢
٦٣	٤
٦٤	٢
٦٥	٢
٦٦	٦
٦٧	١
٦٨	٣
٦٩	٣
٧٠	٢
٧١	٣
٧٢	٦
٧٣	٤
٧٤	٣
٧٥	٤
٧٦	١١
٧٧	١٢
٧٨	٩
٧٩	١١
٨٠	٦
٨١	٨
٨٢	٥
٨٣	٤
٨٤	٢
٨٥	١
المجموع	١١٤

بيانات الجدول مستخرجة من الجدول السابق .

وحيث أنه قد تم تحديد الخصائص التالية :

$$\mu = E(x) = \alpha\beta \qquad Var(x) = \alpha\beta^2 = \alpha\beta + Q$$

وكما سبق أن ذكرنا من قبل فإن العنصر الأول في التباين يمثل تباين بواسون المعروف λ أما العنصر الثاني فإنه يمثل التباين الإضافي . وتكون المشكلة الآن هي إيجاد تقديرات لكل من α, β . وحيث إن اللوغاريتم الطبيعي لدالة الإمكان الأعظم لتوزيع جاما - بواسون هو

$$\log L = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{x_i} \log(\alpha+j-1) - \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{x_i} \log(j) + \sum_{i=1}^{k} x_i \log(\beta) - \sum_{i=1}^{k} x_i \log(1+\beta) - n\,\alpha \log(1+\beta)$$

وعندما تم أخذ المشتقه الأولى لهذه الدالة بالنسبة للمعلمات α, β نجد أنه من الصعب إيجاد قيمة نهائيه كتقديرات لهذه المعلمات وبالتالي فلابد أن نلجأ للطرق الرقمية كما سبق أن ذكرنا ومن هنا تم استخدام الحاسب الآلي لاستخدام الطرق الرقمية للحصول على تلك التقديرات ، وتم استخدام طريقة العزوم للحصول على القيم المبدئية للحل وبناء على تلك الطرق حصلنا على القيم التالية :

$$\hat{\alpha} = 4.591867 \qquad \hat{\beta} = 1.034438$$

$$\hat{\mu} = 4.75 \qquad \hat{Q} = 4.913579$$

$$\hat{V} = 9.6635786882$$

أيضاً نستطيع تقدير قيمة الخطأ المعياري لكل من التقديرات $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\mu}$, $\hat{Q}$ باستخدام البيانات الفعلية وذلك بعد تكوين مصفوفه المعلومات .

ويكون مقلوب مصفوفه المعلومات المقدرة هو :

$$I(\alpha,\beta)^{-1} = \begin{bmatrix} .07565326 3816 & .0170428681435 \\ .0170428681485 & .0229356024628 \end{bmatrix}$$

ونجد أن القيم التقديرية للخطأ المعياري لكل من $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\mu}$ وكذلك $\hat{Q}$ كما يلي :

$$S.E\ (\hat{\alpha}) = .275051383956$$

$$S.E\ (\hat{\beta}) = .151445047677$$

$$S.E\ (\hat{\mu}) = .852328414725$$

$$S.E\ (\hat{Q}) = 1.58031484104$$

وحيث إننا اعتبرنا أن Q عبارة عن مقياس كمية الزيادة في التباين عن تباين التوزيع البواسوني (يمكن تسميتها الزيادة في التباين) Extra – Poisson Variation .

ودعنا الآن نختبر ما إذا كانت هذه البيانات تتبع التوزيع البواسوني أم لا . فإذا كانت تتبع التوزيع البواسوني فإن قيمة Q الزيادة في التباين لابد أن تساوي صفر أما إذا كانت أكبر من الصفر فمعنى ذلك أن البيانات لا تتبع التوزيع البواسوني ويوجد تباين إضافي ويكون الاختبار كما يلي :

$$H_o :\ Q = 0 \qquad Vs. \qquad H_A \ :\ Q > 0$$

وبفرض أن Q تقريباً تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدرة $\hat{Q}$ وتباين قدره $\hat{V}$. فإننا نجد أن فترة الثقة باحتمال قدره ٩٥٪ (أي أن مستوى المعنوية = ٠,٠٥) لقيمة Q هي

$$\hat{Q} \pm 1.96 \ [S.E\ (Q)]$$

أي أن فترة الثقة هي

(1.816162 , 8.010996)

وحيث أن قيمة $Q = 0$ لا تقع في هذه الفترة فإننا سوف نرفض الفرض العدمي H_o أي قبول الفرض البديل H_A (بأنه يوجد زيادة في التباين عن التوزيع البواسوني) ومن هنا فإن توزيع جاما – بواسون يكون مفضل عن

التوزيع البواسوني في توفيق البيانات الخاصة بعدد الحوادث النوويه .

وتكون المشكلة الآن هي اختبار ما إذا كان النموذج يكون مناسباً لبيانات عدد الحوادث بدقة أم لا . ونجد أن أحد الاختبارات المناسبة لهذه الحاله هو الاختبار الذي يمكننا من مقارنة البيانات النظرية التي يمكن الحصول عليها من النموذج الاحتمالي والبيانات الفعلية . هذا الاختبار هو اختبار كا٢ وتكون كا٢ المحسوبة هي $X^2 = 25.30118$ والتي تعتبر صغيرة جداً بالمقارنة بقيمة كا٢ الجدولية والتي تساوي [X^2 $(.05,21) = 32.67$] بدرجات حريه قدرها ٢١ درجة حرية ومستوى معنوية 05. وهذا يدل على أن التقديرات مقنعة .

وحيث أن التقدير باستخدام دالة الإمكان الأعظم تقدير مقنع فإنه يوجد الآن سبب مقنع لاستخدام توزيع جاما - بواسون (توزيع ذو الحدين السالب التقريبي) كنموذج رياضى تتبعه البيانات الخاصه بعدد الحوادث النووية .

٥ - اختبار صلاحية النموذج :

ويمكن اختبار النموذج المقترح ومدى صلاحيته للتطبيق على مطالبات فروع التأمينات العامة الأخرى وذلك بتطبيقه على مطالبات تأمين السيارات الأجباري بدولة الكويت من عام ١٩٧٢ حتى عام ١٩٨٨ والخاصة بمطالبات ناتجة عن حوادث ينتج عنها أضراراً بشرية جدول (٣) وسبب اختيار هذه البيانات هو سهولة الحصول عليها أولاً ثم أن هذه المطالبات تمثل نسبه صغيرة جداً من عدد الوثائق وهذا ما يتفق مع التوزيع البواسوني حيث أنه يعتبر توزيع الحوادث النادرة وكذلك يعتبر التوزيع المقترح (جاما - بواسون) توزيع الحوادث المتقطعة النادرة أيضاً .

جـــدول رقـم (٣)

عدد المطالبات الناتجه عن حوادث تصيب الغير (حوادث بشرية فقط) في تأمين السيارات الأجباري (تأمين المسئولية المدنية - بشرية فقط) في دولة الكـــويت ١٩٧٢ - ١٩٨٨

السنة	عدد المطالبات	السـنة	عدد المطالبات
١٩٧٢	٣٨٨	١٩٨٠	٥٧٣
٧٣	٣٥١	٨١	٧١٢
٧٤	٥٣٩	٨٢	٦٥٥
٧٥	٤٧٦	٨٣	٧٨٤
٧٦	١٠٧٠	٨٤	٧٠٠
٧٧	٧٥٦	٨٥	١١١٢
٧٨	٤٧٥	٨٦	١٢٧٨
٧٩	٥٣٧	٨٧	٧٤٧
		٨٨	٧٧٨

المصدر : الاحصاءات المالية ١٩٧٢ - ١٩٨٨ - الإدارة المركزية للاحصاء - الكويت .

وباستخدام الطرق الرقمية نحصل على القيم التالية

$\hat{\mu} = 701.18239$ $\hat{\beta} = 57.789444$ $\hat{\alpha} = 12.1445$

$\hat{V} = 41259.833$ $\hat{Q} = 40558,009$

أيضـاً يمكن تقدير قيمة الخطأ المعياري لكل من التقديرات $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\mu}, \hat{Q}$ باستخدام البيانات الفعلية وذلك بتكوين مصفوفة المعلومات وإيجاد مقلوب هذه المصفوفة وهو :

$$I_{(\alpha,\beta)}^{-1} = \begin{bmatrix} .35608999 & -1.694436 \\ -1.694436 & 8.3927908 \end{bmatrix}$$

- غير أن القيمة التقديرية للخطا المعياري لكل من $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\mu}$ وكذلك $\hat{Q}$ كما يلي :

$$S.E(\hat{\alpha}) = .59673275$$

$$S.E(\hat{\beta}) = 2.897031$$

$$S.E(\hat{\mu}) = 48.65166$$

$$S.E(\hat{Q}) = 2149.7256$$

ومرة أخرى للتحقق من وجود التباين الإضافي والذي يزيد عن تباين التوزيع اليواسوني نفترض أن :

$$H_O : Q = 0 \qquad VS \qquad H_A : Q > 0$$

وبفرض أن Q تقريباً تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره $\hat{Q}$ وتباين قدره $\hat{V}$ فتكون فترة الثقة بإجمالي قدرة ٩٥٪ (أي أن مستوى المعنوية ٥٪) لقيمة Q هي :

$$\hat{Q} \pm 1.96 \; [S.E(\hat{Q})]$$

أي أن فترة الثقة هي :

(37032.459,44083.559)

وحيث أن $Q = 0$ لا تقع في هذه الفترة فإننا سوف نرفض الفرض العدمي H_O - أي قبول الفرض البديل H_A (بأنه يوجد زيادة في التباين عن التوزيع البواسوني) ومن هنا فإن توزيع جاما - بواسون يكون مفضل عن التوزيع البواسوني في توفيق البيانات الخاصة بمطالبات تأمين السيارات الإجباري لدولة الكويت (الحوادث التي ينتج عنها خسائر بشرية) .

وبتطبيق اختيار كـا^2 مرة أخرى نجد أن $x^2 = 23.445822$ والتي تعتبر صغيرة بالمقارنة بقيمة كـا^2 الجدولية والتي تساوي $x^2\,(.05,16) = 26.3$ بدرجات حرية قدرها ١٦ درجة حرية ومستوى معنوية .05 .

وهذا يدل على أن التقديرات مناسبة للنموذج المقترح أي أن هذا النموذج بهذه التقديرات يعتبر نموذجاً صالحاً للتطبيق لهذه البيانات .

ويمكن أن نخلص من ذلك بأن توزيع جاما - بواسون (النموذج المقترح)

يعد نموذجاً صالحاً ومناسباً لتوفيق بيانات المطالبات المختلفة وذلك باستخدام معلمات خاصة بالتوزيع يمكن تقديرها باستخدام البيانات الفعلية لمطالبات فروع التأمينات العامة .

المراجع

أولاً : المراجع العربية :

- د . خضر عبد العباس حمزة ، د . غسان هاشم الخطيب ، ١٩٨٤ ، « الطاقة الذرية واستخداماتها » ، منشورات منظمة الطاقة الذرية العراقية ، بغداد ، الجمهورية العراقية .
- د . محمد توفيق البلقيني ، ١٩٩٠ ، « محاضرات في النظرية الإحصائية » ، محاضرات لطلبة شعبة الإحصاء ، جامعة المنصورة ، جمهورية مصر العربية .
- الإحصاءات المالية ، ١٩٧٢ - ١٩٨٨ ، الإدارة المركزية للإحصاء ، وزارة التخطيط ، دولة الكويت .

ثانياً : المراجع الأجنبية :

- American Nuclear Insurers Reports, 1986, Report 3, pp. 2 – 51 .
- Bhattacharya, s. and Holla, M., 1965, «On a Discrete Distribution With Special Reference to the Theory of Accident Proneness», JASA., 52 : 195 – 206 .
- Bishop, Y., 1975, Discret Multivariate Analysis, Theory and Practice, MIT Press Cambridge, Mass., U.S.A.
- EL – bolkiny, Mohamed T., 1986, «A Demographic Analysis of Heterogeneous Coronary Heart Disease Mortality Rates Over Space and Time, Ph. D. Thesis, University of Connecticut, U.S.A.
- Hogg, R. and Craig, A., 1978, Introduction to Mathematical Statiatics, 4th Edition, Macmillan Publishing Co. Inc., New York, U.S.A.
- International Atomic Enery, Nuclear Safety Review, 1984 – 1987, Vienna .